MA2 – „písemná" přednáška (za) 18. 3. 2020 (druhá část)

I. Prostory $R^n$ – jak je máme chápat, zvláště v souvislosti s vyšetřováním funkcí, o kterých jsme „mluvili" v první části přednášky, tj. $\vec{f}: R \to R^n$; $f: R^n \to R$; $\vec{f}: R^n \to R^m$

(i) – z hlediska lineární algebry –

$R^n$ je „základní" vektorový (lineární) prostor dimense $n$ – – tj. $\dim R^n = n$; je to „abstraktní" vektorový prostor, jehož prvky $x \in R^n$ jsou uspořádané $n$-tice reálných čísel, $x = (x_1, x_2, .., x_n)$, $x_i \in R$, a je zde definováno sčítání $(x+y)$ a násobení konstantou $(cx)$, a tyto operace splňují „rozumná" pravidla (viz LA).

Navíc, v „abstraktní světě" matematiky lze libovolný vektorový prostor $V$, $\dim V = n$, „popsat" pomocí $R^n$: je-li $\{\vec{b}_1, .., \vec{b}_n\}$ báze $V$, pak z LA víme, že každý prvek $v \in V$ lze jednoznačně vyjádřit lin. kombinací vektorů báze, tj.

$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + .. + v_n\vec{b}_n$$

a zobrazením $V$ na $R^n$: $\vec{v} \longleftrightarrow (v_1, v_2, .., v_n)$, které je zobrazením prostým a zobrazením na $R^n$ lze se z obecného abstraktního prostoru $V$ „dostat" do prostoru $R^n$, kde se navíc i zachovají součet i násobek z prostoru $V$.

(např. polynomy stupně $\leq n$ lze „nahradit" uspořádanou $(n+1)$-ticí koeficientů polynomu)

(ii) „v našem" světě: ($n \leq 3$)

1) Prvky $x = (x_1, x_2, x_3)$ prostoru $R^3$ lze chápat jako nástroj pro popis „polohy" bodů (chápeme-li „geometricky" náš prostor jako prostor bodů) pomocí soustavy souřadné – my zatím zůstaneme u kartézské soustavy souřadné: body zpravidla budeme značit $A, B, X, Y$, a bodům přiřadíme jednoznačně (dle pravidel geometrie soustavy souřadné) trojici reálných čísel (každý „umí"):

$X \to (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, budeme často psát $X = (x_1, x_2, x_3)$

(takto popsaný „prostor bodů" se často značí $E^3$ a nazývá Euklidovský prostor (ještě se vzdálenosti bodů – bude za „chvilku" zavedena) – my „zůstaneme" u $R^3$)

(analogicky, pomocí $R^2$ lze popsat body v rovině)

Trojice $(x_1, x_2, x_3)$ jsou „souřadnice" bodu $X$, často se ale mluví přímo o bodu $X$ (viz zápis $X = (x_1, x_2, x_3)$)

2) Prvky $(v_1, v_2, v_3) \in R^3$ lze užít i k popisu „geometrických i fyzikálních vektorů – druhá možnost, jak si prvky prostoru $R^3$ (a u rovinných vektorů prvky prostoru $R^2$) představit: budeme psát $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ($\vec{v} = (v_1, v_2)$)

Vektor $\vec{v}$ je pak orientovaná úsečka (v naší geometrické představě prostoru), která má počáteční bod v $A = (a_1, a_2, a_3)$ a koncový bod $B = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$ (značí se také $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$) a $\overrightarrow{AB}$ se nazývá umístění vektoru $\vec{v}$, $A$ – lib. bod) a obráceně (jak jistě víte z analytické geometrie), máme-li dány bod $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$, pak umístění vektoru $\vec{v} = \vec{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

(V literatuře se někdy prostor vektorů $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, popsaných zde, nazývá zaměření prostoru $E^3$ a značí $V^3$, my budeme užívat stejně jako u prostoru bodů $R^3$, a chápat význam $(v_1,v_2,v_3)$ (trojice čísel); dle situace – někdy jako body, jindy jako vektory)

V lineární algebře byla v $R^3$ základní báze (kanonická)

$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$ –

– a toto jsou obrazy tří základních vektorů – geometrických –
– navzájem kolmých a délky 1.

V geometrii " také každý geometrický vektor $\vec{v}$ (orientovaná " úsečka) může být vyjádřen jediným způsobem

$$\vec{v} = v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}+v_3\vec{e_3}$$ a tak vlastně „zápis"

$$\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$$ je vyjádření izomorfismu z LA
(viz (i) zde – abstraktní přístup)

Z toho je zřejmé chápat vyjádření geometrických vektorů pomocí prvků z $R^3$ (tedy sčítání a násobení konstantou se zachová)

a fyzikální vektor $\vec{f}$ – nástroj, sloužící k popisu veličiny, u které je důležitý kromě velikosti jistě směr (a orientace) – a opět chápeme analogicky zápis: $\vec{f} = (f_1,f_2,f_3)$

A nyní $R^n$, $n \in N$ $(n>1)$:

Prvek $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ si budeme „představovat" buď jako

bod – budeme psát spíše $X = (x_1, x_2, .., x_n)$

nebo jako

vektor – budeme značit $\vec{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$

(opět, „podle okolností")

Co ještě zobecníme z $R^3 (R^2)$ do $R^n$:

1) skalární součin vektorů a velikost vektoru:

v $R^3$: je-li $\vec{u}$ geometrický vektor, velikostí $\|\vec{u}\|$ rozumíme délku „úsečky" $\vec{u}$ (nebo vzdálenost krajních bodů vektoru $A, B$, je-li $\vec{u} = \vec{AB}$)

jsou-li $\vec{u}, \vec{v}$ dva geometrické (nebo „fyzikální") vektory, pak skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ je definován pomocí velikostí $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ a úhlu, který „úsečky" (orientované!) $\vec{u}, \vec{v}$ svírají ($\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$$

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ vyjádřeny souřadnicemi vzhledem ke kanonické bázi, tj. $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bázi, pak (jak asi víte)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \quad \text{a norma} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

(tj. $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + u_2\vec{e_2} + u_3\vec{e_3}$, $\vec{v} = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$).

A navíc, pak vzdálenost bodů $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ je délka (tedy norma) vektoru $\overrightarrow{XY}$, tedy (značíme $d_3(X,Y)$)

$$\underline{d_3(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-x_i)^2}} \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}\right)$$

(neboť $\overrightarrow{XY} = (y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3)$ )

<u>A zobecnění „do“ $R^n$:</u>

( provede se v matematice „obvyklým“ způsobem – místo $n=3$ budeme psát „jen“ $n\in N$ – a očekává se (a v matematice se musí „dokázat“, že u takto definovaných pojmů se „zachovají“ všechny důležité vlastnosti, které potřebujeme v $R^n$)

<u>Definice</u>: Je-li $\vec{x}=(x_1,x_2,..x_n)\in R^n$, $\vec{y}=(y_1,y_2,..,y_n)\in R^n$, pak

1) <u>skalární součin vektorů $\vec{x},\vec{y}$</u> je definován:

- $$\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ;$$

2) <u>norma (velikost) vektoru $\vec{x}$</u>: • $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \left(= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)$

3) <u>vzdálenost bodů $X=(x_1,x_2,..x_n)$, $Y=(y_1,y_2,..y_n)$:</u>

$$d_n(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}\right.$$

nehledě na to, zda $X\in R^n$ považujeme za vektor nebo bod, definujeme pro <u>prvky $x,y\in R^n$ vzdálenost prvků $x,y\in R^n$</u>:

- $$d_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$ (tzv. Euklidovská norma)

A vzdálenost v $R^n$ je zřejmě ten základní nástroj pro definici limity v $R^n$ a pro vytvoření analogie v $R^n$ diferenciálního počtu, který „znáte“ z MA1 v R.

<u>Shrňme si jisté základní vlastnosti skalárního součinu, normy a vzdálenosti v $R^n$</u> (občas „to budeme potřebovat“):

1) <u>Vlastnosti skalárního součinu:</u> ($\vec{u},\vec{v}\in R^n$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$)

Pro libovolné vektory $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^n$ (nebo lze užít značení $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V^n$) a lib. $\alpha\in R$ platí:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
3. $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geqq 0$ a $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{o}$

2) <u>Norma vektoru</u> $\vec{u}=(u_1;u_2,..,u_n)$ je $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i}$

Je-li $\vec{u},\vec{v}\in R^n\,(V^n)$, $\alpha\in R$, pak:

1. $\|\vec{u}\|\geqq 0$, $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{o}$
2. $\|\alpha\vec{u}\|=|\alpha|\,\|\vec{u}\|$
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leqq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost)
4. $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leqq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ (Cauchy-Schwarzova nerovnost – velmi užitečná)

Důkazy vlastností skalárního součinu jsou, doufám, hned „vidět“, u normy i tvrzení 1. a 2. jsou jasná; důkazy 3. a 4. „uděláme“ pro zájemce „za chvilku“. Ještě dříve vlastnosti vzdálenosti.

3, Vzdálenost (obvykle se nazývá „metrika“) v $R^n$

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, pak

$$d_n(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \quad \left( = \| B - A \| = \sqrt{(B-A)\cdot(B-A)} \right)$$

a platí: $A, B, C \in R^n$:

1. $d_n(A,B) \geqq 0$, $d_n(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
2. $d_n(A,B) = d_n(B,A)$
3. $d_n(A,B) \leqq d_n(A,C) + d_n(C,B)$
   (trojúhelníková nerovnost – důležitá!)

(Poznámka – vzdálenost v $R^n$ se často značí i $\varrho_n(A,B)$)
Metrika $d_n(A,B)$ se nazývá Euklidovská metrika v $R^n$ – a proto se často nazývají prostory $R^n$ Euklidovské n-dimensionální prostory.

A nyní nanočení důkazů některých vlastností metriky, normy:

a) metrika: 1, a 2, – zřejmé (jak se v matematice často říká)

3) $d_n(A,B) = \| A - B \| = \| (A-C) + (C-B) \| \underset{*}{\leq}$

$\underset{(*)}{\leq} \| A - C \| + \| C - B \| = d_n(A,C) + d_n(C,B)$

(*) – dle vlastnosti 3. normy vektoru: zde
$\vec{u} = A - C$, $\vec{v} = C - B$

b) <u>norma</u>: (důkazy pro zájemce – už obtížnější (pro „realfyz")

3. víme-li, že platí 4., tj. $|\vec{u}.\vec{v}| \leqq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, pak máme:

$$\underline{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2} = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) =$$
$$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} =$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \overset{(4)}{\leqq}$$
$$\leqq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

tj. $\underline{\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$

a

4. – <u>Cauchy-Schwarzova nerovnost</u>

vezměme si „vektor" $\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$, $\alpha \in R$:

pak $0 \leqq (\vec{u}+\alpha\vec{v}).(\vec{u}+\alpha\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\alpha(\vec{u}.\vec{v}) + \alpha^2 \|\vec{v}\|^2$ ;(*)

kvadratická funkce v proměnné $\alpha$ (*)) je pro všechna $\alpha \in R$ nezáporná, tedy diskriminant „musí" být $D \leqq 0$, tj.:

$$D = 4(\vec{u}.\vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leqq 0$$ a odtud už snadno:

$$\underline{|(\vec{u}.\vec{v})| \leqq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$$

<u>Poznámka 1</u>: Rozšíření „skalárního součinu vektorů do $R^n$" umožňuje i zavést pojem kolmosti dvou vektorů:

<u>Def.</u> $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ jsou navzájem kolmé ($\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$), když $\vec{u}.\vec{v} = 0$

a lze definovat i „úhel", který $\vec{u} \neq \vec{o}$, $\vec{v} \neq \vec{o}$ svírají": $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ ($\alpha \in \langle 0, 2\pi)$)"

Poznámka 2.

V matematice pokračovalo zobecňování vzdálenosti – je-li $M \neq \emptyset$ nějaká množina, pak, je-li zde definováno zobrazení: $x, y \in M \rightarrow d(x,y) \in R$, které splňují vlastnosti metriky (viz 3) ve vyšetřování $R^n$) –, axiomy metriky" – pak takovou množinu nazýváme metrickým prostorem a také lze zde budovat pojem limity.
Metrické prostory se vyšetřují v matematické disciplíně" zvané „funkcionální analýza" – velmi užitečné i v aplikacích.
A zvláště „užitečné" a v matematice důležité, a i v aplikacích (například ve kvantové fyzice) jsou takové metrické prostory, které jsou i lineární prostory (viz LA), nekonečné dimenze, a se skalárním součinem – tj. opět zobrazením $x, y \in M \rightarrow \langle x,y\rangle \in R$, tak, že dané zobrazení má všechny „naše" vlastnosti skalárního součinu v $R^n$ – pak lze ze skalárního součinu $\langle x, y\rangle$ opět (jako v $R^n$) odvodit normu $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ a také vzdálenost $d(x,y) = \|x-y\|$ ($x-y$ je definováno, jsme v lineárním prostoru. Tyto „skvělé" prostory se nazývají prostory Hilbertovy – a Hilbert zavedl „první" z nich – rozšíření $R^n$, kde $x=(x_1, \dots, x_n)$ na $\ell^2$, což je prostor posloupností $x = (x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$ takových, že $\sum_1^\infty x_i^2 < \infty$ (zobecnění $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$) – někdy ve „Vybraných partiích"

## Poznámka 3

„I v $R^n$ – jakékoliv zobrazení

$$x, y \in R^n \longrightarrow d(x,y) \in R$$

takové, že $d(x,y)$ má vlastnosti metriky (Euklidovské), je metrika, tj. nástroj k budování pojmu limity – v prostorech konečné dimense (tj. u nás v $R^n$) je ukázáno, že metriky jsou t.zv. ekvivalentní, tedy, bude-li „$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$" v Eukl. metrice $d_n(x,y)$, bude totéž platit v jakékoliv" metrice, kterou si „vymyslíme.

(„limitu" v $R^n$ zavedeme hned „za chvilku")

## Příklady „netradičních" metrik, pro jednoduchost v $R^3$ ($R^2$)

(můžete sami vyzkoušet, že axiomy metriky jsou zde splněny) $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|$$ – t.zv. metrika „pošťácká" (nebo New Yorská)

$$d_{max}(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

(analogicky lze i v $R^n$)

## Poznámka 4.

Máme-li už metriku v prostorech $R^n$, můžeme už studovat limitu, spojitost, derivace (analogie) u funkcí $f: R^m \to R^n$ „asi" podobně jako v MA1 pro $f: R \to R$.

Ale doufám, že si pamatujete, že vlastnosti funkce (např. extrémy fcí) nebyly dány jen vlastnostmi vyšetřované funkce, ale i „druhem" množiny, a vlastnostmi této množiny, na které jsme funkci vyšetřovali – např. spojitá funkce má vždy globální extrémy na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, ale stačí", aby chyběl "jeden krajní bod intervalu, a pak už "toto nemusí" platit!

Takže i při vyšetřování „obecnějších" funkcí budeme muset zkoumat a popsat vlastnosti množin v $R^n$ – nedobře to na příští přednášku – u funkcí, kterými „začneme", toto nebudeme „potřebovat".

## II. Vektorové funkce jedné proměnné – limita, spojitost, derivace

Jak už bylo řečeno", vektorovou funkcí jedné proměnné rozumíme" zobrazení $\vec{f}: M \subset R \to R^n$, $n > 1$, podrobněji

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \quad x \in M,$$

a $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ jsou reálné funkce, $f_i(x): M \to R$, $i = 1, 2, \ldots n$.

(Příklady byly dány v první části přednášky)

A nyní – limita „takové" funkce?

Asi opět „zobecnění" limity $f: M \subset R \to R$ (MA1):

Připomeneme definici vlastní limity $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $(a \in R, L \in R)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x: \; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(tj. $f(x)$ je libovolně blízko $L$ pro $x$, dostatečně blízká bodu $a$ ($a$ $x \neq a$) – „lidovější" formulace definice)

Zobecnění „vlastní" limity pro funkce $\vec{f}: M \subset R \to R^n$:

**Def.:** Nechť $\vec{f}$ je definovaná v $P(a)$ (v prstencovém okolí bodu $a$). Pak říkáme, že $\vec{f}$ má v bodě $a$ limitu $\vec{L} \in R^n$, a píšeme $\lim\limits_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{L}$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow d_n(\vec{f}(x), \vec{L}) < \varepsilon \qquad (1)$$

Pěkné! Ale co ta definice znamená? A jak se taková limita spočítá?

Zkusme se podívat na $\underline{d_n(\vec{f}(x), \vec{L}) < \varepsilon}$:

dle definice $d_n(x,y)$ v $R^n$: $\vec{L} = (L_1; L_2, .., L_n)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - L_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - L_i| \left( = \sqrt{(f_i(x)-L_i)^2} \right) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x)-L_i)^2} < \varepsilon$$

a tedy platí, když $\lim\limits_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{L}$ (dle (1)), že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: \forall i = 1, 2, .. n: \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - L_i| < \varepsilon,$$

tj. $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = L_i$ (limita každé složky $\vec{f}$ je odpovídající složka $\vec{L}$)

A obráceně „též" platí:

„ když $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2, .. n$, pak $\lim\limits_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{L}$

(tento technicky náročnější důkaz, ale asi zřejmé! – když každý výraz $|f_i(x) - L_i|$ je „malý", bude i malá $d_n(\vec{f}(x), \vec{L}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - L_i)^2}$.

Shrnuto: $\lim\limits_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{L} \iff \lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i, \ i=1,2,..n$

Tedy „česky" – „limita vektoru je vektor limit", neboli

$$\lim_{x\to a}(f_1(x), f_2(x), .., f_n(x)) = (\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), .., \lim_{x\to a} f_n(x))$$

A nyní dále už jednoduché:

Spojitost fce $\vec{f}$ v bodě $a$: $\vec{f}$ je def. v $U(a)$ a

Definice: $\vec{f}$ je spojitá v bodě $a$, když $\lim\limits_{x\to a}\vec{f}(x) = \vec{f}(a)$;

Věta: $\vec{f}$ je spojitá v bodě $a$ $\iff$ $f_i(x)$ je spojitá v $a$, $i=1,2..n$.

Derivace $\vec{f}$ v bodě $a$:

Definice: („kopie" derivace funkce (reálné) jedné proměnné)

Derivací $\vec{f}'(a)$ funkce $\vec{f}$ v bodě $a$ nazýváme

$$\vec{f}'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(a)}{x-a} \left(= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(a+h)-\vec{f}(a)}{h}\right)$$

Věta: $\vec{f}$ má v bodě derivaci $\vec{f}'(a)$ $\iff$ každá složka $f_i(x)$, $i=1,2,.n$ má derivaci $f_i'(a)$.

(uvažujeme zde jen vlastní derivace)

Tedy: („lidově")

$$(f_1(x), f_2(x), .., f_n(x))' = (f_1'(x), f_2'(x), ... f_n'(x)),$$

tj. „derivace vektoru" je „vektor derivací"

Příklady :

1) $\vec{f}(t) = (1+2t, 2-t, t)$ je vektorová fce, definovaná a spojitá v $R$ (tj. v lib. bodě $t \in R$ je $\vec{f}$ spojitá)

a $\vec{f}'(t) = ((1+2t)', (2-t)', t') = (2, -1, 1)$, $t \in R$

2) $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$ – opět, $\vec{f}$ je spojitá v $R$ a
$\vec{f}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $t \in R$

3) $\vec{f}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $\vec{f}$ je spojitá v $R$, a
$\vec{f}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, $t \in R$

Všimněte si zde, že vektory $\vec{f}(t)$ a $\vec{f}'(t)$ jsou navzájem kolmé ! $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = (R\cos t, R\sin t) \cdot (-R\sin t, R\cos t) =$
$= -R^2\cos t \sin t + R^2 \sin t \cos t = 0$ !

a. jak víte z geometrie, tečna ke kružnici je kolmá k přímce, která prochází středem kružnice a bodem dotyku !

4) máme-li funkci $f : (a,b) \to R$, pak graf je parametrisován ! : $G_f(x) = (x, f(x))$, $x \in (a,b)$ (tj. graf popsán vektorovou funkcí) ; pak
$$G_f'(x) = (1, f'(x)) \text{ – derivace } G_f(x) \text{ a tento}$$
vektor je směrový vektor tečny ke grafu v bodě $[x, f(x)]$ :
parametrizace tečny : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ – rovnice tečny
v $[x_0, f(x_0)]$

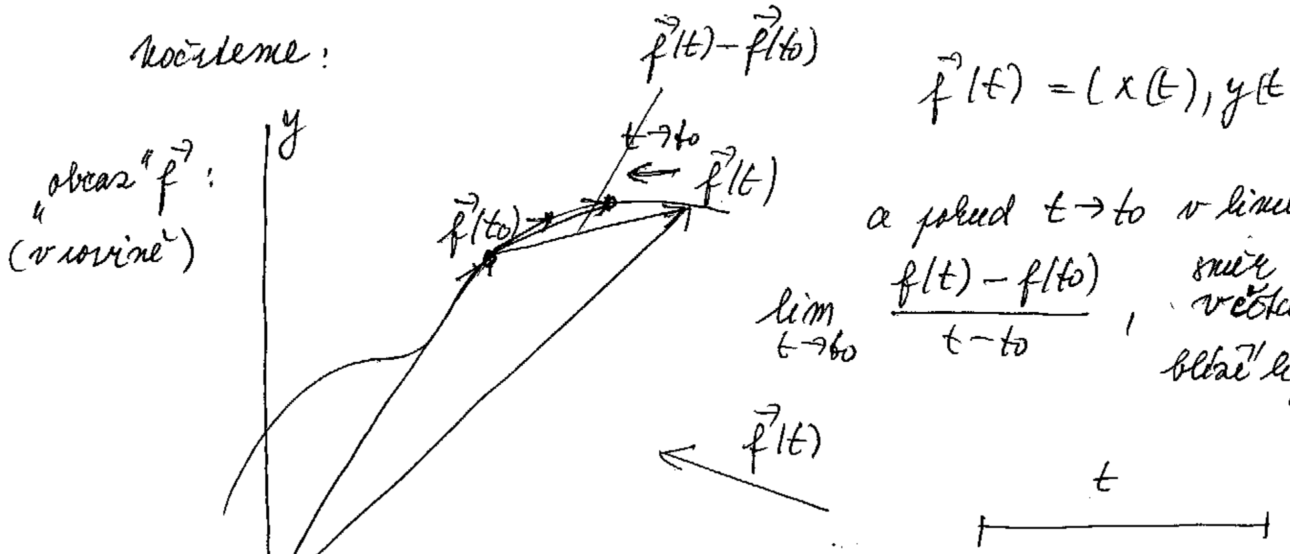
a parametrisace tečny: $\begin{aligned} x &= x_0 + t \\ y &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot t \end{aligned}$ , $t \in R$

tedy je „vidět", že vektor $(1, f'(x_0))$ je směrový vektor tečny ke grafu fce $f$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$

Pokud je $n=2$, nebo $n=3$, pak množinu bodů (v rovině, nebo v prostoru) $[f_1(x), f_2(x), f_3(x)]$, $x \in (a, b)$ (pro vektorovou funkci $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, definovanou na $(a, b)$) si lze (při vhodných předpokladech – $\vec{f}$ spojitá, ex. $\vec{f}'$ v $(a,b)$) jako křivku v rovině (nebo v prostoru) – blíže u křivkového integrálu později), nebo ve fyzice (uvedli jsme) jako popis dráhy pohybu ( $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in J$ )

Pak, pokud $\vec{f}'(x_0) \neq \vec{o}$, je tečný vektor ke křivce (nebo $\vec{f}'(t_0)$ tečný vektor k dráze pohybu – $\vec{f}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$ )

nočrtneme:




$\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$

a pokud $t \to t_0$ v limitě

$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ , směr vektoru včetně se blíží „k tečně"

Podrobněji v mechanice (fyzika), a pak také „my" v definici křivky pro „křivkový" integrál.